NGUYỄN XUÂN LIÊM

GIẢI TÍCH

GIÁO TRÌNH LÝ THUYẾT VÀ BÀI TẬP CÓ HƯỚNG DẪN

TẬP 1

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

NGUYỄN XUÂN LIÊM

GIẢI TÍCH

TẬP I

GIÁO TRÌNH LÝ THUYẾT VÀ BÀI TẬP CÓ HƯỚNG DẪN

(Tái bản lần thứ bảy)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

[illegible]

LỜI NÓI ĐẦU

Giải tích Toán học có một địa vị quan trọng đặc biệt trong chương trình Toán cao cấp của các khoa tự nhiên các trường đại học sư phạm, đại học tổng hợp và các trường đại học kĩ thuật... Đó là một môn học khó. Người học luôn gặp những tình huống thay đổi, những giả thiết phức tạp, sự đan xen các cấu trúc toán học. Hơn nữa chương trình Giải tích lại dài và nặng, sinh viên thường phải làm việc với môn học này trong ba học kì. Không ít người đã tỏ ra lúng túng, càng về sau các kiến thức bị dồn nén càng trở nên rối và khó hiểu. Ôn tập, hệ thống các kiến thức đã học một cách đều đặn sẽ giúp bạn học tiếp các phần sau của chương trình dễ hơn, nhanh hơn và chắc hơn. Nhằm giảm bớt khó khăn cho người học, chúng tôi đã cố gắng đề cập đến các khái niệm mới một cách tự nhiên, trình bày các vấn đề một cách mạch lạc, sáng sủa và tận dụng mọi cơ hội làm rõ tính trực quan của các vấn đề được xét.

Một vài điều lưu ý về các chương của giáo trình :

Chương I gồm hai phần : §1 giới thiệu cận trên và cận dưới của một tập hợp số thực. Các khái niệm này đã được học trong Đại số tuyến tính và Hình học Giải tích. Tuy nhiên đó là những vấn đề quan trọng cần được ôn lại một cách cẩn thận.

§2 giới thiệu thêm một phương pháp xây dựng các số thực để bạn đọc tham khảo. Với các bạn đọc mới làm quen với Giải tích, đây là một vấn đề khó và trừu tượng. Bạn chỉ cần nắm các ý chính không cần đi sâu vào các chứng minh. Sau một thời gian, khi đã có một vốn hiểu biết tốt hơn về Giải tích, đọc lại phần này, bạn sẽ thấy thật ra nó không khó như ta tưởng.

Trong chương IV, chúng tôi đã giới thiệu dãy chuẩn tắc, những phép phân hoạch một đoạn, từ đó định nghĩa tích phân xác định như là giới hạn của một dãy số thực (dãy tổng tích phân). Theo chúng tôi, định nghĩa này dễ tiếp nhận và tiện dụng. Lí thuyết tích phân là một lí thuyết hay và đẹp. Ngoài việc nghiên cứu các chứng minh định lí, bạn đọc nên hệ thống các kết quả đã thu được, đặc biệt là các kết quả liên quan đến định nghĩa tích phân xác định, điều kiện khả tích của một hàm số, các lớp hàm số khả tích, quan hệ giữa tích phân xác *định và nguyên hàm... Về hàm các số sơ cấp, chúng tôi đã giới thiệu hàm số lôgarit trước sau đó mới đến hàm số mũ, hàm số ngược của hàm số lôgarit. Cách làm này gọn nhẹ, tiết kiệm được thời gian. Phần lớn các giáo trình Giải tích xuất bản từ cuối những năm 60 đến nay đều trình bày các hàm số sơ cấp theo trình tự này.*

Chương V tương đối khó, trừu tượng. Tuy nhiên, để có những hiểu biết tốt về không gian $\mathbb{R}^p$, về giới hạn và tính liên tục của các ánh xạ trên không gian $\mathbb{R}^p$, bạn đọc nên đầu tư một cách thích đáng thời gian và công sức cho chương này. Khi học tiếp các chương sau, bạn đọc vẫn nên đọc lại chương này nhiều lần. Những cố gắng của bạn sẽ được đền bù : Bạn sẽ tự tin, không lúng túng khi gặp các hàm số nhiều biến số.

Một số điểm khó trong giáo trình đã được đánh dấu "". Bạn đọc chỉ cần nắm được những ý cơ bản của vấn đề, công nhận các kết quả.*

Giáo trình được biên soạn cẩn thận với mong muốn của tác giả là nhiều bạn đọc có thể dùng nó làm tài liệu tự học. Các thầy, cô giáo sử dụng giáo trình này có thể hướng dẫn sinh viên tự đọc một số phần, như vậy sẽ có thời gian tập trung vào các vấn đề trọng tâm và các điểm khó của chương trình.

Trừ chương I, dành cho ôn tập và tham khảo, sau mỗi chương đều có nhiều bài tập. Các bài tập được chọn lựa một cách công phu sẽ giúp bạn đọc củng cố, đào sâu lí thuyết và bồi dưỡng một số kĩ năng quan trọng cần thiết. Các bài tập khó đã được đánh dấu "". Các bài tập đều có đáp số, hướng dẫn hoặc lời giải. Để nắm vững môn học, bạn đọc nên làm ít nhất một nửa số bài tập trong giáo trình.*

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn các giáo sư Đoàn Quỳnh, Vũ Tuấn và Đỗ Hồng Tân đã đọc kĩ bản thảo, góp nhiều ý kiến bổ ích về cả nội dung lẫn hình thức.

Chúng tôi cũng xin chân thành cảm ơn TS Phạm Phu đã đọc cẩn thận phần bài tập của bản thảo, giúp tác giả kiểm tra lại lời giải các bài tập và góp nhiều ý kiến xác đáng.

Cuối cùng chúng tôi đặc biệt cảm ơn TS Trần Phương Dung đã biên tập tốt và khẩn trương bản thảo, đồng thời đã giúp tác giả khắc phục một số sơ suất trong việc biên soạn nó, nhờ vậy giáo trình này đã đến với bạn đọc sớm hơn.

Tháng 8–1997

TÁC GIẢ

Chương I

TẬP HỢP SỐ THỰC

§1. QUAN HỆ THỨ TỰ

Nội dung chủ yếu của mục này là cận trên, cận dưới, cận trên đúng và cận dưới đúng của một tập hợp số thực, những khái niệm có một vai trò đặc biệt quan trọng trong Giải tích. Mục này gần như không có liên quan gì với §2.

1.1. *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp, $\leq$ là một quan hệ trong X. Ta gọi $\leq$ là một quan hệ thứ tự trong X nếu

i) $x \leq x$ với mọi $x \in X$,

ii) $x \leq y$ và $y \leq z \Rightarrow x \leq y$ với mọi $x, y, z \in X$,

iii) $x \leq y$ và $y \leq x \Rightarrow x = y$ với mọi $x, y \in X$.

$(X, \leq)$ gọi là một tập hợp sắp thứ tự.

Nếu $x \leq y$ và $x \neq y$ thì ta viết $x < y$.

Quan hệ $x \leq y$ có thể viết dưới dạng $y \geq x$.

Ví dụ 1. Trong tập hợp các số thực **R** quan hệ thông thường $x \leq y$ là một quan hệ thứ tự.

Ví dụ 2. Giả sử X là một tập hợp, $\mathcal{P}(X)$ là tập hợp các tập hợp con của X. Quan hệ $A \subset B$ trong $\mathcal{P}(X)$ là một quan hệ thứ tự.

Ví dụ 3. Trong tập hợp các số nguyên dương $\mathbf{N}^*$ ta đưa vào quan hệ $m \vdots n$ (m chia hết cho n). Đó là một quan hệ thứ tự.

1.2 *Tập hợp sắp thứ tự toàn phần*

Định nghĩa. Tập hợp sắp thứ tự $(X, \leq)$ gọi là *toàn phần* nếu với hai phần tử bất kì x, y của X, ta có

$$x \leqslant y \text{ hoặc } y \leqslant x.$$

Nói một cách khác (X, $\leqslant$) gọi là một tập hợp sắp thứ tự toàn phần nếu nó là một tập hợp sắp thứ tự trong đó hai phần tử bất kì đều có thể so sánh được.

Trong ví dụ 1, **R** là một tập hợp sắp thứ tự toàn phần. Các tập hợp sắp thứ tự trong hai ví dụ 2 và 3 không phải là những tập hợp sắp thứ tự toàn phần.

1.3. *Các ánh xạ tăng, giảm*

Định nghĩa. Giả sử X và Y là hai tập hợp sắp thứ tự. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là

i) tăng nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$,

ii) tăng nghiêm ngặt nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

iii) giảm nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$,

iv) giảm nghiêm ngặt nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,

v) đơn điệu nếu f là tăng hoặc giảm,

vi) đơn điệu nghiêm ngặt nếu f là tăng nghiêm ngặt hoặc giảm nghiêm ngặt.

1.4. *Các khoảng trong* **R**

Giả sử a, b là hai phần tử của **R**, a < b. Ta kí hiệu

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leqslant x \leqslant b\},$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\},$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a \leqslant x < b\},$$

Các tập hợp này gọi là những khoảng, a và b gọi là hai điểm đầu của khoảng, a gọi là điểm gốc, b là điểm cuối của khoảng [a, b] gọi là một khoảng đóng hoặc một đoạn (hoặc một khoảng compắc), (a, b) gọi là một khoảng mở, [a, b) và (a, b] gọi là những khoảng nửa mở.

Ta kí hiệu

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x \geqslant a\}$$
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$$
$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R} : x \leqslant a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R} : x < a\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$$

Các tập hợp này cũng được gọi là những khoảng.

Một điểm của khoảng khác hai đầu của khoảng gọi là một điểm trong của khoảng.

Cận trên, cận dưới. Cận trên đúng, cận dưới đúng.

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

1.5. *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp sắp thứ tự, $A \subset X$.

a) Phần tử $a \in X$ gọi là một cận trên (hoặc chặn trên) của tập hợp A nếu

$$x \leqslant a \text{ với mọi } x \in A.$$

b) Phần tử $a \in X$ gọi là một *cận dưới* (hoặc chặn dưới) của A nếu

$$a \leqslant x \text{ với mọi } x \in A.$$

Ví dụ. Giả sử $X = \mathbf{R}$ là tập hợp sắp thứ tự bởi quan hệ $\leqslant$ thông thường. Khi đó $A = [0, +\infty)$ không có cận trên. Một số bất kì $a \leqslant 0$ đều là một cận dưới của A.

Tập hợp A gọi là *bị chặn trên* nếu nó có một cận trên, A gọi là *bị chặn dưới* nếu nó có một cận dưới. Tập hợp A gọi là *bị chặn* nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

1.6. *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp sắp thứ tự và $A \subset X$. Nếu $a \in A$ và a là một cận trên của A thì a gọi là *phần tử lớn nhất* của A và được kí hiệu là max A.

Phần tử lớn nhất của A là duy nhất.

Thật vậy, nếu a và a' là hai phần tử lớn nhất của A thì $a' \leqslant a$ và $a \leqslant a'$. Do đó $a' = a$.

Phần tử nhỏ nhất của một tập hợp được định nghĩa tương tự.

Phần tử nhỏ nhất của tập hợp A được kí hiệu là min A.

Ví dụ. Giả sử $X = \mathbf{R}$, $A = [0, 1)$. Khi đó A là một tập hợp bị chặn trong $\mathbf{R}$. Phần tử nhỏ nhất của A là 0 ; A không có phần tử lớn nhất.

1.7. *Định nghĩa.* Giả sử X là một tập hợp sắp thứ tự, $A \subset X$.

a) Phần tử $a \in X$ gọi là *cận trên đúng* (hoặc cận trên) của tập hợp A nếu nó là phần tử nhỏ nhất (nếu có) của tập hợp các cận trên của A.

Hiển nhiên cận trên đúng của A nếu có là duy nhất.

b) Phần tử $a \in X$ gọi là *cận dưới đúng* (hoặc cận dưới) của A nếu nó là phần tử lớn nhất (nếu có) của tập hợp các cận dưới của A.

Cận dưới đúng của A nếu có là duy nhất.

Cận trên đúng của A được kí hiệu là sup A.

Cận dưới đúng của A được kí hiệu là inf A.

1.8. *Định lí.* Nếu a là phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) của A thì nó là cận trên đúng (cận dưới đúng) của A.

Chứng minh. Giả sử a là phần tử lớn nhất của A.

Theo định nghĩa 1.6, $a \in A$ và a là một cận trên của A. Nếu $b \in X$ là một cận trên của A thì $x \leq b$ với mọi $x \in A$. Đặc biệt $a \leq b$. Vậy a là phần tử nhỏ nhất của tập hợp các cận trên của A, tức là $a = \sup A$.

Ví dụ. Lấy $X = \mathbf{R}$, $A = (0, 3]$. Khi đó

$\max A = 3$, $\sup A = 3$. $\inf A = 0$; A không có phần tử nhỏ nhất.

Hiển nhiên điều kiện cần để một tập hợp A có cận trên đúng (trong tập hợp sắp thứ tự X) là A là một tập hợp bị chặn trên. Nói chung đó không phải là điều kiện đủ. Tuy nhiên sau này ta sẽ thấy rằng mỗi tập hợp không rỗng bị chặn trên trong $\mathbf{R}$ đều có một cận trên đúng và mỗi tập hợp không rỗng bị chặn dưới trong $\mathbf{R}$ đều có một cận dưới đúng.